Weiterführende Fragen der Ökonometrie

Übungsaufgaben – Blatt 5

Aufgabe 1

Nehmen Sie an, dass die Fehler u_{it} des Modells

$$y_{it} = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{j,it} + a_i + u_{it} \quad i = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T$$

konstante Varianz σ_u^2 aufweisen und nicht autokorreliert sind. Das Modell in ersten Differenzen sei in Matrixschreibweise durch

$$\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \Delta\mathbf{u}$$

gegeben. Für die Fehler konnte bereits gezeigt werden, dass $\mathrm{Corr}[\Delta u_{it}, \Delta u_{i,t+1}] = -0.5$. Somit lässt sich die Varianz-Kovarianz-Matrix der Fehler explizit angeben und eine GLS-Schätzung durchführen:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = ((\Delta\mathbf{X})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\Delta\mathbf{X})^{-1}(\Delta\mathbf{X})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\Delta\mathbf{y},$$

wobei $\boldsymbol{\Omega} = \mathrm{Var}[\Delta\mathbf{u}]$ die Varianz-Kovarianz-Matrix der Fehler ist.
Ziel ist es nun, $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ zu ermitteln. Führen Sie dazu die folgenden Schritte durch:

(i) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{\Omega}$ eine Blockmatrix mit N Blöcken von folgender Form ist:

$$\boldsymbol{\Omega} = \sigma_u^2 \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

dabei bezeichnet $\mathbf{A}$ die $(T-1 \times T-1)$-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{0}$ eine $(T-1 \times T-1)$-Matrix, die nur Nullen enthält.

(ii) (3 Punkte) Bestimmen Sie $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ für den Fall $T = 4$ und $N = 3$ bzw. N beliebig.
Hinweis:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Möglichkeiten zum Invertieren von Matrizen finden Sie beispielsweise auf Wikipedia.

Aufgabe 2

Use the panel data set `crime3.txt` in this exercise which contains information on crime rates in police districts in Norway for 1972 and 1978. In Example 13.6 in Wooldridge (2009) it is stated that the only explanatory variable is "clear-up percentage" (*clrprc*). However, it is likely that past clear-up rates have a deterent effect on current crime. Therefore, the unobserved effects model for the two years is

$$lcrime_{it} = \beta_0 + \delta_0 y78_{it} + \beta_1 clrprc_{it-1} + \beta_2 clrprc_{it-2} + a_i + u_{it}.$$

(i) (4 Punkte) In the model of Example 13.6, test the hypothesis $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_2$. (*Hint*: Define $\theta_1 = \beta_1 - \beta_2$ and write β_1 in terms of θ_1 and β_2. Substitute this into the equation and then rearrange. Do a t test on θ_1.)

(ii) (3 Punkte) If $\beta_1 = \beta_2$, show that the differenced equation can be written as

$$\Delta \log(crime_i) = \delta_0 + \delta_1 \Delta avgclr_i + \Delta u_i,$$

where $\delta_1 = 2\beta_1$ and $avgclr_i = (clrprc_{i,-1} + clrprc_{i,-2})/2$ is the average clear-up percentage over the two previous years.

(iii) (3 Punkte) Estimate the equation from part (ii). Compare the adjusted R-squared with that in (13.22). Which model would you finally use?

Quelle: Wooldridge 3e & 4e Computer Exercise C13.6