

Name	Dichte bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion	Verteilungsfunktion	Momente	Anmerkungen
Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$ mit Parameter $\mu \in]-\infty,\infty[$ und $\sigma \in (0,\infty[$	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$	$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}dt$ (Berühmtes Beispiel, dass eine Stammfunktion nicht existiert!)	Alle Momente exisitieren: Erwartungswert $E[X]=\mu$ Varianz $Var(X)=\sigma^2$ Schiefe $v(X)=0$	Gesetze der großen Zahlen; Werte werden mit Standardnormalverteilung berechnet ($Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$), welche symmetrisch zum Ursprung ist
chi^2-Verteilung χ_n^2 mit n Freiheitsgraden (degrees of freedom $df=n$)	$f_n(x)=\frac{x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}$ für $x>0$	analytisch sehr kompliziert!	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X]=n$ Varianz $Var(X)=2n$ Schiefe $v(X)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$	Die Summe $\sum_{i=1}^n X_i^2$ von n unabhängigen, quadrierten Zufallsvariablen $X_i\sim N(0,1)$ ist χ_n^2-verteilt
Student-t-Verteilung t_n mit n Freiheitsgraden (degrees of freedom $df=n$)	$f_n(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	analytisch sehr kompliziert!	Im Fall $n>s$ existieren die ersten s: Erwartungswert $E[X]=0$ Varianz $Var(X)=\frac{n}{n-2}$ Schiefe $v(X)=0$	Für zwei unabhängige Zufallsvariablen $X\sim N(0,1)$ und $Y\sim\chi_n^2$ ist $T:=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ gerade t_n-verteilt
F**-Verteilung** $F(m,n)$ mit m Freiheitsgraden im Zähler und n Freiheitsgraden im Nenner	$f(x)=\begin{cases}\frac{m^{m/2}n^{n/2}\Gamma(m/2+n/2)x^{m/2-1}}{\Gamma(m/2)\Gamma(n/2)(mx+n)^{(m+n)/2}} \text{ für } x\geq 0\\ 0 \text{ für } x<0\end{cases}$	analytisch sehr kompliziert!	Im Fall $n>2s$ existieren die ersten s: Erwartungswert $E[X]=\frac{n}{n-2}$ $Var(X)=\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$	Alternativ kann man für unabhängige Zufallsvariablen $X\sim\chi_m^2$ und $Y\sim\chi_n^2$ eine $F(m,n)$-verteilte ZV Z auch definieren als: $Z=\frac{X/m}{Y/n}$
Cauchyverteilung mit Zentrum t und Breitenparameter s; falls diese 0 bzw. 1, so ist das Standard-Cauchy-verteilt (bzw. t-verteilt mit $df=1$).	$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{s}{s^2+(x-t)^2}$ für $s>0$ und $-\infty<t<\infty$	$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x-t}{s})$	Kein Moment ist definiert, weil die Integrale nicht existieren	Der Quotient aus zwei standardnormalverteilten Zufallsvariablen ist Standard-Cauchy-verteilt.
Gleichverteilung auf Intervall $[a,b]$ bzw. auf der Menge $\{a,...,b\}$ mit $a<b$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} \text{ für } a\leq x\leq b\\ 0 \text{ für sonst}\end{cases}$	$F(x)=\frac{x-a}{b-a}$ für $a\leq x\leq b$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X]=\frac{a+b}{2}$ Varianz $Var(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ Schiefe $v(X)=0$	Wichtig ist die Inversionsmethode, mit der man gleichverteilte Zufallsvariablen in andere Verteilungen überführt (s. Simulationslemma)
Dreiecksverteilung auf einem Intervall $[a,b]$ und einem „wahrscheinlichsten" Wert $c\in[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} \text{ für } a\leq x\leq c\\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \text{ für } c\leq x\leq b\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}\frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} \text{ für } a\leq x\leq c\\ 1-\frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} \text{ für } c\leq x\leq b\end{cases}$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X]=\frac{a+b+c}{3}$ $\sigma^2(X)=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2}{36}$	
Binomialverteilung $B(n,p)$ mit Anzahl $n\in]0,\infty[$, Treffer $k\in[0,n]$ und Trefferwahrscheinlichkeit p	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$F(X=k)=\sum_{l=0}^{k}\binom{n}{l}p^k(1-p)^{n-l}$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X]=n\cdot p$ Varianz $Var(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$ Schiefe $v(X)=\frac{1-2p}{\sqrt{Var(X)}}$	Symmetrisch für $p=0,5$; falls $n\cdot p\implies\lambda$, ähnlich zur Poisson (brauchbar bei $n\geq 50$ und $p\leq 0,05$); Ziehen mit Zurücklegen
Hypergeometrische Verteilung mit N Elementen der Grundgesamtheit, davon $M\leq N$ mit einer gewissen Eigenschaft und einer Anzahl $n\leq N$ Elementen in der Stichprobe	$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$F(X=k)=\sum_{l=0}^{k}\frac{\binom{M}{l}\cdot\binom{N-M}{n-l}}{\binom{N}{n}}$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X]=n\cdot\frac{M}{N}$ Varianz $Var(X)=n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$	Ziehen ohne Zurücklegen Ist $n/N<0,05$, so unterscheidet sie sich kaum von der Binomialverteilung (Rücklegeeffekt spielt keine Rolle mehr!)

Name	Dichte bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion	Wahrscheinlichkeitsverteilung	Momente	Anmerkungen
Poissonverteilung mit Treffer $k \in [0, n]$ und Poissonparameter $\lambda \in]0, \infty[$	$f(x) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$F(x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k}{k!}$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X] = \lambda$ Varianz $Var(X) = \lambda$ Schiefe $v(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$	Für $\lambda > 30$ starke Ähnlichkeit zur Normalverteilung
Logistische Verteilung mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}^+$	$f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}{\beta\left(1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}\right)^2}$	$F(x) = \frac{1}{1+e^{-\frac{x-\alpha}{\beta}}}$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X] = \alpha$ Varianz $Var(X) = \beta^2 \cdot \frac{\pi^2}{3}$	Oftmals in der Schätzung von Zeitreihen in der nichtlinearen Regression; Modellierung von Verweildauern von Systemen
Logarithmische Normalverteilung $LN(\mu, \sigma^2)$ mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ für } x > 0 \\ 0 \text{ für } x \leq 0 \end{cases}$	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^x \frac{1}{t} e^{-\frac{(\ln(t)-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$ $Var(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}(e^{\sigma^2}-1)$ Schiefe $v = (e^{\sigma^2}+2)\sqrt{(e^{\sigma^2}-1)}$	Der Logarithmus einer logarithmisch-normalverteilten Zufallsvariablen ist normalverteilt
Exponentialverteilung $Exp(\lambda)$ mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}$	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ Varianz $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ Schiefe $v(X) = 2$	Die Summe $X^2 + Y^2$ zweier unabhängiger, standardnormalverteilter, quadrierter Zufallsvariablen ist exponentialverteilt mit $\lambda = \frac{1}{2}$ (s. χ^2_2-Verteilung)
Laplaceverteilung mit Lageparameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Skalenparameter $\sigma \in \mathbb{R}^+$	$f(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{\lvert x-\mu \rvert}{\sigma}}$	$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \text{ für } x \leq \mu \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \text{ für } x > \mu \end{cases}$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X] = \mu$ Varianz $Var(X) = 2\sigma^2$	Falls $X_1, ..., X_4$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsgrößen sind, so ist die Determinante der zugehörigen Matrix $Z := X_1X_4 - X_2X_3$ standardlaplaceverteilt
Gammaverteilung $\gamma(p, b)$ mit Parameter $b, p \in \mathbb{R}^+$ ist eine Verallgemeinerung der Exponentialverteilung	$f(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} \text{ für } x \geq 0 \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} \int_0^{bx} t^{p-1} e^{-t} \Gamma(p)^{-1} dt \\ 0 \text{ für } x < 0 \end{cases}$	Alle Momente existieren: Erwartungswert $E[X] = \frac{p}{b}$ Varianz $Var(X) = \frac{p}{b^2}$ Schiefe $v(X) = \frac{2}{\sqrt{p}}$	
Weibullverteilung mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{R}_0^+$	$f(x) = \lambda \cdot k \cdot (\lambda \cdot k)^{k-1} e^{-(\lambda x)^k}$	$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^k}$ für $x \geq 0$	Alle Momente existieren: $E[X] = \frac{1}{\lambda}\Gamma(1+\frac{1}{k})$ $\sigma^2(X) = \frac{[\Gamma(1+\frac{2}{k})-\Gamma^2(1+\frac{1}{k})]}{\lambda^2}$ $v(X) = \frac{\Gamma(1+\frac{3}{k})/\lambda^3-3\mu\sigma^2-\mu^3}{\sigma^3}$	Sehr wichtig in Fall von Lebensdaueranalysen, wobei $T = \frac{1}{\lambda}$ die Lebensdauer misst.

Anmerkungen:

- Die Gammafunktion ist definiert als $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ und hat folgende (für Ökonometriker) wichtige Eigenschaften:
  1. Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$, insbesondere für $n \in \mathbb{N} : \Gamma(n) = (n-1)!$.
  2. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- In `R` lassen sich die meisten Dichten und Verteilungen mittels `?distribution` finden.