

Übersicht über der Matrizenoperatoren $\mathrm{tr}, \mathrm{vec}, \otimes$ und $T_{m,n}$

Im Folgenden sei A eine $n \times m$-Matrix und B eine $p \times q$-Matrix, also Abbildungen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nzw. $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, X, Y variabel und passend; definiere folgende Operatoren:

- Spur-Operator: $\mathrm{tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{1\times 1}$ mit:
$$\mathrm{tr}(X) := \sum_{i=1}^{n} x_{ii}$$
- Vec-Operator: $\mathrm{vec} : \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}^{mn\times 1}$ mit:
$$\mathrm{vec}(A) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} & a_{12} & \cdots & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}^T$$
(Konvention: Spalten einer Matrix werden aufeinander gestapelt, beginnend mit der ersten von oben)
- Kronecker-Produkt $\otimes : \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{p\times q} \to \mathbb{R}^{mp\times nq}$ mit:
$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$
(Jeder Eintrag der linken Matrix wird mit der rechten Matrix multipliziert; dies is offensichtlich nicht kommutativ!)
- Permutationsmatrix: $T_{m,n} : \mathbb{R}^{mn\times 1} \to \mathbb{R}^{mn\times 1}$ definiert durch:
$$T_{m,n}\,\mathrm{vec}(A) = \mathrm{vec}(A^T)$$
(Einfaches Beispiel rechnen; man sieht sofort, dass es sich um eine orthogonale Matrix mit nur Einsen und Nullen handelt)

Übersicht der Operatoreigenschaften:

- Vec-Operator:
  - Additivität: $\mathrm{vec}(A + B) = \mathrm{vec}(A) + \mathrm{vec}(B)$ für zwei quadratische Matrizen gleicher Dimension.
  - Skalarmultiplikation: $\mathrm{vec}(\alpha A) = \alpha\,\mathrm{vec}(A)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Distributivgesetze: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{p\times q}, C \in \mathbb{R}^{n\times k}, D \in \mathbb{R}^{q\times l}$
  - $\mathrm{tr}(aX + bY) = a\,\mathrm{tr}(X) + b\,\mathrm{tr}(Y)$ (für Skalare $a, b \in \mathbb{R}$ und $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$)
  - $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(XA)$ (nur falls $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$)
  - $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{vec}(A^T)^T\,\mathrm{vec}(X)$
  - $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{rk}(X)$ (nur falls $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und idempotent)
  - $(AC \otimes BD) = (A \otimes B)(C \otimes D) \in \mathbb{R}^{mp\times kl}$
  - $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$ (nur falls $mp = nq$ und nur falls $n = m$, also $n = m = p = q$)
  - $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \in \mathbb{R}^{nq\times mp}$
  - $\mathrm{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\cdot\mathrm{vec}(X) \in \mathbb{R}^{nq\times 1}$ (nur falls $X \in \mathbb{R}^{m\times p}$)
  - $T_{m,n} = T_{n,m}^T$
  - $T_{n,m}T_{m,n} = I_{mn}$
  - $T_{n,m} = T_{m,n}^{-1}$
  - $B \otimes A = T_{p,m}(A \otimes B)T_{n,q} \in \mathbb{R}^{mp\times nq}$