

1 Motivation

In der Querschnittsökonometrie hat man oft Stichprobenannahmen wie eine unabhängig und gleich verteilte Stichprobe, kurz

$$X_i \sim \mathrm{IID}(\mu_0, \sigma_0^2).$$

Da (mit Hilfe von Modellen) diese Realisationen quadriert, kubisch, unter der Wurzel, ... in die Verteilungen von Teststatistiken unter H_0 eingehen, benötigt man immer ein Standardargument, dass diese unter dieser funktionalen Veränderung stochastisch unabhängig bleiben, welches in der Wahrscheinlichkeitstheorie **Blockungslemma** genannt wird:

2 Blockungslemma

Diese Aussage ist in ihrer Allgemeinheit für einen Ökonometriker ausreichend und vielfach anwendbar, wie die Beispiele im Anschluss zeigen.
Voraussetzung:
Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und weiter seien $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}$ Funktionen.
Behauptung:
$g(X_1, \ldots, X_k)$ und $h(X_{k+1}, \ldots, X_n)$ sind wieder stochastisch unabhängig.
Beweis: (im diskreten Fall; im stetigen Fall analog)
Sei $Y_1 := g(X_1, \ldots, X_k), Y_2 := h(X_{k+1}, \ldots, X_n)$. Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, dann:

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) &\overset{\text{Def.}}{=} \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n): \\ g(x_1,\ldots,x_k)=y_1 \wedge h(x_{k+1},\ldots,x_n)=y_2}} P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&\overset{\text{Un.}}{=} \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n): \\ g(x_1,\ldots,x_k)=y_1 \wedge h(x_{k+1},\ldots,x_n)=y_2}} \prod_{j=1}^{n} P(X_j = x_j) \\
&\overset{\text{Sum.}}{=} \left(\sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_k): \\ g(x_1,\ldots,x_k)=y_1}} \prod_{j=1}^{k} P(X_j = x_j) \right) \left(\sum_{\substack{(x_{k+1},\ldots,x_n): \\ h(x_{k+1},\ldots,x_n)=y_2}} \prod_{j=k+1}^{n} P(X_j = x_j) \right) \\
&\overset{\text{Def.}}{=} P(Y_1 = y_1) \cdot P(Y_2 = y_2) \quad \square
\end{aligned}$$

3 Beispiel:

- $X_1, \ldots, X_4$ unabhängig $\Longrightarrow \sin(X_1 + X_2)$ und $X_3 - 2X_4$ stochastisch unabhängig.
- $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\overset{\text{mehrfach}}{\Longrightarrow} X_1^l, \ldots, X_n^l$ stochastisch unabhängig für $l = 2, 3, \ldots$ (vgl. Empirische Momente!)