Zeitreihenökonometrie

Übungsaufgaben – Blatt 9

1. **Aufgabe** *(Multiplikativ eingehende Schocks)*
   Gegeben sei folgender stochastischer Prozess

   $$y_t = ze_t, \quad t = 1, 2, \ldots,$$

   wobei $e_t \sim i.i.d.(1, 2)$ und die Zufallsvariable z mit Erwartungswert $E[z] = 1$ und Varianz $Var(z) = 2$ sich nicht über die Zeit hinweg verändert und stochastisch unabhängig von e_t ist.

   (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie $E[y_t]$. Hängt der Erwartungswert von t ab?

   (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie $Var(y_t)$. Hängt die Varianz von t ab?

   (c) (1 Punkt) Bestimmen Sie $Cov(y_t, y_s)$, $t \neq s$.

   (d) (1 Punkt) Ist der stochastische Prozess $\{y_t\}$ asymptotisch unkorreliert?

   (e) (1 Punkt) Ist $\{y_t\}$ schwach abhängig?

   (f) (1 Punkt) Ist $\{y_t\}$ schwach stationär?

   (Aufgaben (a)-(d), (f) ähnlich Wooldridge (2009) Aufgabe 11.3)

2. **Aufgabe** *(Kovarianz und Korrelation des Random Walk)*
   Gegeben sei der Random Walk mit deterministischem Startwert y_0

   $$y_t = y_{t-1} + u_t, \qquad u_t \sim WN(0, \sigma^2), \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

   (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Autokovarianz des Random Walks gilt

   $$Cov(y_t, y_{t-k}) = \min(t, t-k) \cdot \sigma^2.$$

   Wie lautet die Autokovarianz bei $k \geq 0$?

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Autokorrelation des Random Walks gilt

   $$Corr(y_{t+h}, y_t) = \sqrt{\frac{\min(t+h, t)}{\max(t+h, t)}}.$$

   Wie lautet die Autokorrelation bei $h \geq 0$?
   Hinweis: Machen Sie sich vorher klar, dass für $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ gilt:

   $$a \cdot b = \min(a, b) \cdot \max(a, b)$$

3. **Aufgabe** *(Random Walk vs. stationärer AR(1)-Prozess)*

Es gelte

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + e_t, \quad e_t \sim i.i.d.(0;3). \tag{1}$$

(a) Für diesen Prozess sollen nun jeweils 10 Realisationen simuliert werden mit folgenden Varianten für α_0 und α_1:

(1) $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_1 = 0.8$,

(2) $\alpha_0 = 2$ und $\alpha_1 = 0.8$,

(3) $\alpha_0 = 0$ und $\alpha_1 = 1$,

(4) $\alpha_0 = 2$ und $\alpha_1 = 1$.

Die Einschwingphase sei 50 Perioden, die Untersuchungsphase 20 Perioden und der Startwert sei 0.

(i) (2 Punkte) Was erwarten Sie für die Plots, die sich für diese Simulationen ergeben? Gehen Sie in Ihrer Antwort insbesondere auf die Unterschiede zwischen den vier Fällen ein.

(ii) (3 Punkte) Erweitern Sie das Programm `mcarlo1_gen_ar1.r`, um jeweils die 10 Realisationen der vier stochastischen Prozesse zu simulieren. Plotten Sie in einer Graphik jeweils die Ergebnisse für den ganzen Zeitraum (70 Perioden).

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie für jeden Prozess den Erwartungswert und die Varianz. Nehmen Sie dabei für die ersten beiden Prozesse an, dass der Prozess schon unendlich lange gelaufen ist, und für die letzten beiden Prozesse, dass $y_0 = 0$ gilt. Geben Sie jeweils an, um was für einen Prozess es sich handelt.

Vergleichen Sie jeweils das Ergebnis für den Erwartungswert mit dem entsprechenden Plot aus Teil (a).

(c) (2 Punkte) Nehmen Sie an, dass Sie sich in Periode 70 befinden und eine Vorhersage für kommende Perioden machen möchten. Wie gehen Sie vor, wenn Sie eine längerfristige Prognose (über Periode 80 hinaus) machen möchten? Gehen Sie diesbezüglich auf die Unterschiede der Prozesse ein.