

Modulprüfung „Kapitalmarkttheorie“

Studienschwerpunkt Finanzmarkttheorie

10 Kreditpunkte, Bearbeitungsdauer: 150 Minuten

WS 2005/06, 7.3.2006

Prof. Dr. Lutz Arnold

<i>Bitte gut leserlich ausfüllen:</i> Name: Vorname: Matr.-nr.:	<i>Wird vom Prüfer ausgefüllt:</i> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <tr> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black; text-align: center;">A</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black; text-align: center;">B1</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black; text-align: center;">B2</td> <td style="width: 15%; border-right: 1px solid black; text-align: center;">B3</td> <td style="width: 10%; text-align: center;">Σ</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; height: 20px;"></td> <td style="height: 20px;"></td> </tr> </table>	A	B1	B2	B3	Σ					
A	B1	B2	B3	Σ							

Bearbeiten Sie alle acht Aufgaben A1-A8 und zwei der drei Aufgaben B1-B3! In den Aufgaben **A1-A8** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar. Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen!). In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **20 Punkte** erreichbar. Tragen Sie die Lösungen zu den Aufgaben A1-A8 bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein. In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Skript zur Vorlesung übernommen. Ein nicht-programmierbarer Taschenrechner ist als Hilfsmittel zugelassen.

A1: Ponzi-Spiel Die Teilnahmegebühr beträgt €1.000. Jeder Teilnehmer einer Stufe muss vier Nachfolger finden. Er erhält dann €100 Provision pro Nachfolger in den folgenden zwei Stufen. Das Ponzi-Spiel beginnt in Stufe 1 mit einem Teilnehmer und endet mit Stufe 4. Die Provisionen werden ausschließlich aus den Teilnahmegebühren nachfolgender Spielstufen bezahlt. Tragen Sie in die unten stehende Tabelle ein: (a) Die jeweiligen Teilnehmerzahlen der vier Spielstufen, (b) den Gewinn für den Veranstalter pro Spieler und (c) gesamt (jeweils nach Begleichung von Provisionen aus den Teilnahmegebühren), den Gewinn für die Spieler (d) pro Spieler und (e) gesamt. (f) Wie hoch ist der Gesamtgewinn des Veranstalters?

(a)-(e)					
	Teil-	Gewinn für Veranstalter		Gewinn für Spieler	
Stufe	nehmer	pro Spieler	gesamt	pro Spieler	gesamt
1					
2					
3					
4					
Summe		/		/	
(f)					

A2: Erwartungsnutzen Ein Anleger hat die Nutzenfunktion $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Betrachten Sie eine Lotterie mit $x_1 = 27$ und $x_2 = 64$ sowie $\pi_1 = \frac{169}{296}$.

- (a) Wie hoch ist der Erwartungswert der Lotterie?
- (b) Wie hoch ist der Nutzen aus dem Erwartungswert aus Aufgabenteil (a)?
- (c) Wie hoch ist der Erwartungsnutzen?
- (d) Welcher allgemeinere Sachverhalt spiegelt sich hierin wider?
- (e) Wie hoch ist die prozentuale Erwartungsnutzeneinbuße aus der Lotterie verglichen mit der sicheren Zahlung des Erwartungswerts in Aufgabenteil (b)?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: Tauschökonomie unter Unsicherheit (a) Wie lauten die Formeln, die die Bedingungen für Pareto-Optimalität angeben (keine Herleitung notwendig)? (b) Wie lautet die Budgetrestriktion von Konsument i bei Vorliegen von Terminmärkten? (c) Wie lauten dann die Bedingungen für Nutzenmaximierung (keine Herleitung notwendig)? Woran sieht man, dass das Marktgleichgewicht mit Terminmärkten Pareto-optimal ist? (d) Wie lauten die Budgetbeschränkungen bei Handel mit Arrow securities (ASs) statt auf Terminmärkten? (e) Zeigen Sie durch Umformen der Budgetrestriktionen aus Aufgabenteil (d), dass das Marktgleichgewicht mit ASs Pareto-optimal ist.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: Finanzmarktvollständigkeit Gegeben seien drei Wertpapiere mit folgenden Payoff-Vektoren: WP1: (100, 0, 20), WP2: (30, 20, 10), WP3: (0, 20, 40). Im nächsten Zeitpunkt seien drei Umweltzustände möglich ($\Theta = 3$). Es soll für den Zustand $\theta = 2$ eine Arrow security (AS) generiert werden.

(a) Formulieren Sie das Problem in Matrixschreibweise.

(b) Wie lauten die zugehörigen linearen Gleichungen?

(c) Geben Sie mit Hilfe der ersten Gleichung x_1 in Abhängigkeit von x_2 an. Geben Sie mit Hilfe der zweiten Gleichung x_3 in Abhängigkeit von x_2 an.

(d) Setzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabenteil (c) in die dritte Gleichung aus Aufgabenteil (b) ein. Wie viel muss von WP1 gekauft werden? Wie viel von WP2 und WP3?

(e) Was versteht man allgemein unter Vollständigkeit des Finanzmarkts?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Komplettierung des Finanzmarktes mit Optionen In einer Ökonomie mit drei möglichen Umweltzuständen ($\Theta = 3$) ist ein Wertpapier mit dem folgenden Payoff-Vektor gegeben: $(5, 20, 35)$.

- (a) Was ist eine Call-Option? Was versteht man unter dem „strike price“?
- (b) Optionen mit welchen „strike prices“ können hier zur Komplettierung des Finanzmarkts genutzt werden? Wie lauten die Payoff-Vektoren der beiden Optionen?
- (c) Es soll eine Arrow security (AS) für Zustand $\theta = 3$ erzeugt werden. Wie lautet das Problem in Matrixschreibweise?
- (d) Wie lauten die zugehörigen linearen Gleichungen? Wie viele Wertpapiere müssen jeweils gekauft werden?
- (e) Wie „erzeugt“ man mit den betrachteten Wertpapieren die sichere Zahlung 1 (d.h. den Vektor $(1, 1, 1)$)?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A6: Kapitalmarkteffizienz und Bubbles Der sichere Zins ist $i = 0,05$. Betrachten Sie eine Aktie, die für immer die konstante Dividende $D = 1$ abwirft, und eine Bubble

$$B_{t+1} = \begin{cases} 1,05 \frac{B_t}{p}; & \text{W'keit } p \\ \eta_{t+1}; & \text{W'keit } 1 - p \end{cases}$$

mit η_t white noise.

- (a) Wie lautet die „Arbitrage-Gleichung“ für den Aktienkurs Q_t , gemäß der ein risikoneutraler Anleger indifferent ist zwischen sicherer Anlage und Kauf von Aktien?
- (b) Wie lautet der Fundamentalkurs der Aktie? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe der Gleichung aus Aufgabenteil (a).
- (c) Zeigen Sie, dass für beliebige p der „Fundamentals-plus-bubble“-Kurs ein Gleichgewichtskurs ist.
- (d) Sei $D = i = 0$ (kurzer Zeithorizont, keine Diskontierung). Wie hoch ist dann der Preis einer Arrow security (AS) für einen Zustand θ bei Risikoneutralität?
- (e) Wie lautet die „Arbitrage-Gleichung“ aus Aufgabenteil (a) für den Spezialfall aus Aufgabenteil (d)? Leiten Sie diese Gleichung aus der Bepreisung der Kurse „morgen“ $Q_{\theta,t+1}$ mit AS-Preisen her.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A7: Adverse Selektion 100 Unternehmen können ein Projekt realisieren, welches mit Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0,8$ einen Payoff $R_1 = 62,5$ verspricht. 100 andere Unternehmen haben ein Projekt, das mit Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0,5$ einen Payoff $R_2 = 100$ liefert. Beide Projekte liefern keinen Payoff, wenn sie scheitern. Die nötige Investition i.H.v. $B = 40$ soll komplett kreditfinanziert werden, allerdings sind Sicherheiten, $S = 10$, zu hinterlegen. Das Kapitalangebot laute $S(i) = 112.000 \cdot i$.

- (a) Berechnen Sie die erwarteten Gewinne der Kapitalnehmer in Abhängigkeit vom Vertragszins, r . Bei welchen Zinssätzen (r_1 bzw. r_2) hören die Unternehmen jeweils auf, Kapital nachzufragen (keine realistische Größenordnung)?
- (b) Welche durchschnittlichen Erfolgswahrscheinlichkeiten erwarten die Kapitalgeber abhängig vom Zinssatz?
- (c) Wie lauten die erwarteten Rückzahlungen aus Sicht der Kapitalgeber? Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen deren Rendite, i , und dem Zins?
- (d) Wie hoch sind Kapitalangebot und -nachfrage, wenn die Kapitalgeber den Zins r_1 verlangen?
- (e) Berechnen Sie den Umfang der Kreditrationierung. Warum erhöhen die Kapitalgeber den Zins nicht?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A8: Diamond-Dybvig-Modell

Betrachten Sie das Diamond-Dybvig-Modell mit Banken mit $R = \frac{16}{9}$, $L = \frac{6}{7}$ und $u(c) = \frac{4}{c}$. Die Konsumenten sind mit gleicher Wahrscheinlichkeit „geduldig“ oder „ungeduldig“.

- (a) Drücken Sie den Erwartungsnutzen $E[u(c)]$ als eine Funktion von I aus.
- (b) Setzen Sie die Ableitung der Erwartungsnutzenfunktion nach I gleich null (Hinweis: Die Ableitung von $1/(1 - I)$ ist $1/(1 - I)^2$).
- (c) Ermitteln Sie das optimale I^* , indem Sie die Gleichung aus Aufgabenteil (b) nach I auflösen, sowie c_1^* und c_2^* .
- (d) Wie hoch sind bei Verwendung von Sichteinlagekontrakten, die wahlweise c_1^* „früh“ oder c_2^* „spät“ versprechen, die Ansprüche (pro Einleger), die in einem Bank run gegen die Bank erhoben werden?
- (e) Wie hoch sind die zur Verfügung stehenden Mittel (pro Einleger)? Sind Bank-run-Erwartungen selbsterfüllend?

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Erwartungsnutzen

Betrachten Sie eine Lotterie, die x_1 mit Wahrscheinlichkeit π_1 und x_2 mit Wahrscheinlichkeit π_2 liefert (mit $x_1 > x_2$). Ein Anleger hat die Nutzenfunktion $u(x)$. Nehmen Sie zunächst an, dass $u(x)$ strikt konkav ist: $u'(x) > 0 > u''(x)$.

(a) Berechnen Sie die Steigung von Geraden, auf denen Lotterien (x_1, x_2) den gleichen Erwartungswert haben.

(b) Wie lautet der Erwartungsnutzen des Anlegers? Ermitteln Sie die Steigung von Indifferenzkurven. Beweisen Sie, dass die Indifferenzkurven fallend und strikt konvex verlaufen.

(c) Veranschaulichen Sie die Ergebnisse aus den Aufgabenteilen (a) und (b) anhand einer Grafik. Was gilt für die Kurven aus den Aufgabenteilen (a) und (b) auf der „Sicherheitslinie“ $x_1 = x_2$? Zeichnen Sie insbesondere die Indifferenzkurven ein, die die Erwartungsnutzenniveaus $u[E(x)]$ und $E[u(x)]$ repräsentieren.

(d) Definieren Sie den Begriff „Risikoaversion“. Welcher Zusammenhang zwischen Risikoaversion und Nutzenfunktion ergibt sich aus der Abbildung aus Aufgabenteil (c)?

(e) Argumentieren Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus den Aufgabenteilen (a) und (b): Welcher Zusammenhang zwischen $u[E(x)]$ und $E[u(x)]$ gilt, wenn $u'(x) > 0 = u''(x)$ ist? Was bedeutet das?

Aufgabe B2: Moral hazard und Kreditrationierung

N identische Firmen ohne Sicherheiten können jeweils zum Zins r Kapital in Höhe von B bei Banken leihen, um damit (nicht beobachtbar) entweder in Projekt 1 oder in Projekt 2 zu investieren. Projekt j ($j = 1, 2$) bringt mit Wahrscheinlichkeit p_j eine Auszahlung von R_j und mit Wahrscheinlichkeit $(1 - p_j)$ eine Zahlung von null. Annahmegemäß gilt: $R_2 > R_1$, $p_1 R_1 > B$, $p_2 R_2 > B$ sowie $p_1(R_1 - B) > p_2(R_2 - B)$. Das Kapitalangebot ist $S = S(i)$ ($S(0) = 0$, $S'(i) > 0$).

(a) Zeigen Sie, dass $p_1 > p_2$ ist.

(b) Wie lauten die erwarteten Gewinne der Kapitalnehmer, je nachdem, welches Projekt j sie realisieren?

(c) Welches Projekt wollen die Unternehmen bei welchem Zinssatz realisieren? (Begründen Sie, dass r_1 kleiner ist als der maximal mögliche Zinssatz $(R_2/B) - 1$.) Warum fragen sie auf jeden Fall Kapital nach?

(d) Wie lautet die Rendite-Funktion $i(r)$ der Kapitalgeber?

(e) Zeichnen Sie die zusammengesetzte Kapitalangebotsfunktion $S[i(r)]$ und die Kapitalnachfragefunktion so in eine Grafik, dass Kreditrationierung vorliegt. Welche Annahmen müssen dazu erfüllt sein?

Aufgabe B3: Moral hazard und langfristige Beziehungen

Betrachten Sie das Modell mit langfristigen Beziehungen zwischen Kapitalnehmern und Kapitalgebern.

(a) Sei $R^f > p_1(R_1 - B)$. Was bedeutet das für die Gewinne des Kapitalnehmers $E(\pi_1^{KN})$ und damit für sein Verhalten, wenn er nur einmal mit dem Kapitalgeber in Beziehung steht? Was folgt daraus für das Kreditmarktgleichgewicht bei nur einmaliger Kreditbeziehung? Was wird stattdessen über die Beziehung zwischen Kapitalnehmer und Kapitalgeber angenommen?

(b) Wie lautet Nullgewinnbedingung für die Banken bei Realisierung des „guten“ Projekts 1?

(c) Wie lautet die Erwartungsgewinnfunktion der Kapitalnehmer bei Nullgewinnen der Banken?

(d) Leiten Sie mit Hilfe der Formel für die geometrische Reihe den Barwert der aufsummierten Erwartungsgewinne bei wiederholter Realisierung von Projekt 1 her.

(e) Illustrieren Sie den Kreditmarkt in einem Diagramm mit dem Einlagenzins i an der waagerechten Achse. Bei welchen Einlagenzinssätzen i wird in das „gute“ Projekt 1 investiert? Wie lautet die Bedingung dafür, dass ein Kreditmarktgleichgewicht mit Markträumung vorliegt?

Kapitalmarkttheorie WS 2005/06













