Master-Prüfung

„Kapitalmarkttheorie II“

Schwerpunktmodulgruppe „Finanzmärkte“

6 Kreditpunkte

Bearbeitungsdauer: 90 Minuten

WS 2023/24

4.3.2024

Prof. Dr. Lutz Arnold

Bitte gut leserlich ausfüllen:
Name:
Vorname:
Matr.-nr.:

Wird vom Prüfer ausgefüllt:

A	B1	B2	B3	$\sum$

Bearbeiten Sie <u>vier der fünf</u> Aufgaben A1-A5 <u>und zwei der drei</u> Aufgaben B1-B3!

- Die Bearbeitungsdauer beträgt **90 Minuten**.
- In den Aufgaben **A1-A5** sind maximal je **5 Punkte** erreichbar.
- Machen Sie immer so weit wie möglich von den Zahlenangaben in den Aufgabenstellungen Gebrauch (keine allgemeinen Lösungen und Zwischenschritte!).
- Tragen Sie die Lösungen bitte in die Lösungsfelder auf dem Klausurbogen ein.
- In den Aufgaben **B1-B3** sind maximal je **15 Punkte** erreichbar.
- In der Aufgabenstellung nicht explizit definierte Symbole sind aus dem Foliensatz zur Vorlesung übernommen.
- Zugelassenes Hilfsmittel: nicht-programmmierbarer Taschenrechner.
- Bitte überprüfen Sie vor Beginn der Bearbeitung, ob Ihre Klausur alle Seiten enthält. Sie beginnt mit Seite 1 und endet mit Seite 13.

A1: Allais-Paradoxon Betrachten Sie die folgenden Lotterien (Zahlungen in der ersten Zeile, Eintrittswahrscheinlichkeiten darunter):

100 Euro	20 Euro	0 Euro
0	1	0
$\frac{1}{100}$	$\frac{49}{50}$	$\frac{1}{100}$

100 Euro	20 Euro	0 Euro
$\frac{1}{20}$	0	$\frac{19}{20}$
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$

(a) Angenommen, ein Entscheider wählt in der linken Tabelle die obere Lotterie. Erklären Sie mit einem Satz sein Motiv.

(b) Angenommen, der Entscheider wählt auch in der rechten Tabelle die obere Lotterie. Was ist hier sein Motiv?

(c) Wie lautet die Ungleichung, die besagt, dass er gemäß Erwartungsnutzen in der linken Tabelle die obere Lotterie vorzieht?

(d) Wie lautet die Ungleichung, die besagt, dass er in der rechten Tabelle die obere Lotterie vorzieht?

(e) Zeigen Sie anhand der Bedingungen aus den Aufgabenteilen (c) und (d), dass das Entscheidungsverhalten aus (c) und (d) nicht mit der Erwartungsnutzentheorie vereinbar ist.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A2: Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie in der CCM-Ökonomie

(a) Formulieren Sie den ersten Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie für die CCM-Ökonomie (1st Welfare Theorem with CCMs).

(b) Sei $(\mathbf{c^{i'}})_{i=1}^{I}$ eine Pareto-bessere Allokation als die gleichgewichtige. Begründen Sie: $\mathbf{qc^{i'}} \geq \mathbf{qc}^{i}$ für alle i. Begründen Sie: Die Ungleichung ist für mindestens ein i strikt.

(c) Was folgt aus den Ungleichungen in Aufgabenteil (b) für die aufsummierten Kosten der Konsumvektoren?

(d) Was folgt aus Machbarkeit der Allokation aus Aufgabenteil (b) und der Definition des Gleichgewichts in Aufgabenteil (a) für die jeweiligen aufsummierten Kosten der Konsumvektoren?

(e) Beweisen Sie den Satz aus Aufgabenteil (a).

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A3: Finanzmarktvollständigkeit Sei $S = 2$. Betrachten Sie zwei Assets 1 und 2 mit Payoff-Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Preisen $p_1 = \frac{10}{11}$ bzw. $p_2 = \frac{8}{11}$.

(a) Wie hoch ist der sichere Zins (r)?

(b) Ein drittes Asset hat den Payoff-Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Asset-Haltungen z_1 und z_2 der ersten beiden Assets, mit denen man ebenfalls diesen Payoff-Vektor erreicht.

(c) Wie teuer sind die Asset-Haltungen aus Aufgabenteil (b) zusammen?

(d) Wie hoch ist der Zustandspreis (Preis einer AS für Zustand 2) $\tilde{p}_2$? (Hinweis: Betrachten Sie nur Asset 2.) Wie hoch ist der Zustandspreis $\tilde{p}_1$? (Hinweis: Sie können Ihr Ergebnis für den sicheren Zins verwenden.)

(e) Berechnen Sie den Wert der Payoffs von Asset 3 mit den Zustandspreisen. Vergleichen Sie ihn mit Ihrer Antwort zu Aufgabenteil (c).

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A4: CAPM Im CAPM gilt für ein riskantes Einkommen α mit Rendite r^{α}:

$$1 = (1 + Er^{\alpha}) \left[a - bv^{M} \left(1 + Er^{M}\right)\right] - bv^{M}\sigma^{\alpha M}.$$

(a) Definieren Sie v^{α} und r^{α}.

(b) Wenden Sie die angegebene Gleichung auf ein sicheres Asset mit Payoff 1 an.

(c) Wenden Sie nun die angegebene Gleichung auf ein riskantes Asset j und auf den Markt an. Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil (b), um jeweils den Ausdruck in eckigen Klammern zu eliminieren.

(d) Stellen Sie die Gleichungen aus Aufgabenteil (c) so um, dass die CAPM-Formel resultiert.

(e) Begründen Sie, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist: Jedes Asset j, dessen Renditen eine positive Varianz aufweisen, liefert eine positive Risikoprämie $Er^{j} - r$.

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

A5: Gesetz iterierter Erwartungen Es gebe $S = 5$ Umweltzustände und drei Zeitpunkte $t = 1, 2, 3$. Die Umweltzustände treten mit Wahrscheinlichkeiten von $\pi_1 = 1/5$, $\pi_2 = 1/10$, $\pi_3 = 1/20$, $\pi_4 = 3/10$ und $\pi_5 = 7/20$ ein. Eine Zufallsvariable x nimmt die Werte $x_1 = 200$, $x_2 = 400$, $x_3 = 600$, $x_4 = 800$ bzw. $x_5 = 1.000$ an. In $t = 1$ sind alle Zustände in der Informationsmenge $\sigma = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. In $t = 2$ gibt es drei Informationsmengen: $\sigma_1' = \{1, 3\}$, $\sigma_2' = \{2, 5\}$ und $\sigma_3' = \{4\}$. In $t = 3$ hat sich die Unsicherheit aufgelöst.

(a) Stellen Sie die Angaben grafisch dar.

(b) Wie hoch ist $E(x|\,\sigma)$?

(c) Wie hoch ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Zustand $s = 3$ in der Informationsmenge σ_3'?

(d) Berechnen Sie $E(x|\,\sigma_1')$, $E(x|\,\sigma_2')$ und $E(x|\,\sigma_3')$.

(e) Berechnen Sie $E[E(x|\,\sigma')|\,\sigma]$, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus (b).

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

Aufgabe B1: Gleichgewicht mit vollständiger Menge von ASs

(a) Wie lauten die Budgetrestriktionen in der Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs?

(b) Definieren Sie ein Gleichgewicht für die Ökonomie mit einer vollständigen Menge von ASs (ECAS).

(c) Formulieren Sie das Theorem, das die „Äquivalenz" zwischen einem ECCM $((\mathbf{c}^{i*})_{i=1}^{I}, \mathbf{q})$ und einem ECAS herstellt.

(d) Definieren Sie B^i und $B^{i\prime}$. Erklären Sie, warum $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime} \subset B^i$ impliziert, dass Konsument i bei den ECAS-Preisen $\mathbf{c}^{i*}$ wählt.

(e) Beweisen Sie: $\mathbf{c}^{i*} \in B^{i\prime}$.

(f) Beweisen Sie: $B^{i\prime} \subseteq B^i$.

(g) Beweisen Sie Gütermarkträumung und Räumung der AS-Märkte (was den Beweis des Theorems aus Aufgabenteil (c) komplettiert).

(h) Definieren Sie den Begriff Finanzmarktvollständigkeit. Warum liegt mit einer vollständigen Menge von ASs Finanzmarktvollständigkeit vor?

Aufgabe B2: Fundamentale Asset-pricing-Gleichungen

In einem Gleichgewicht mit vollständigen Finanzmärkten (ECFM) gilt $\tilde{p}_s = \pi_s M_s$ und $M_s = \beta^i (u^i)'(c_s^{i*})/(u^i)'(c_0^{i*})$.

(a) Definieren Sie Finanzmarktvollständigkeit formal, und interpretieren Sie die Definition.

(b) Begründen Sie: Aus der ersten Gleichung in der Aufgabenstellung folgt, dass der SDF M nicht für unterschiedliche Individuen i unterschiedlich sein kann.

(c) Wie lautet die Gleichung, die angibt, wie die Asset-Preise p_k von den Zustandspreisen $\tilde{p}_s$ abhängen? Leiten Sie aus dieser Formel die fundamentale Asset-pricing-Gleichung her. Erklären Sie, warum zwei Assets k mit gleichem erwarteten Payoff unterschiedlich teuer sein können.

(d) Betrachten Sie ein einzelnes Asset k mit Preis $p_k = p$ und Payoffs $a_k = a$. Leiten Sie die Formel her, die den Asset-Preis p in Abhängigkeit von $\sigma_{M,p+a}$ angibt (wobei das p im Subskript für den Wiederverkaufspreis p_{t+1} steht). Erklären Sie den Zusammenhang zwischen Asset-Preis p und $\sigma_{M,p+a}$.

(e) Sei $\beta^i = 1$. Wie lauten die Nutzenfunktion und damit der SDF bei Risikoneutralität? Leiten Sie die Random-walk-Formel für den Asset-Preis vor einem Zeitpunkt ohne Payoff a_{t+1} her, und interpretieren Sie sie.

Aufgabe B3: Fundamentale Asset-pricing-Gleichung im Mehr-Perioden-Modell

Im Modell mit Zeithorizont $0, 1, \ldots, T$ beträgt der intertemporale Nutzen ab t:

$$U_{s,t}^i(\mathbf{c}_t^i, \ldots, \mathbf{c}_T^i) = \sum_{\tau=t}^{T} (\beta^i)^{\tau-t} E_t \left[u^i(c_\tau^i) \right],$$

und die Budgetrestriktion für t lautet:

$$c_{s,t}^i + \sum_{k=1}^{K} p_{sk,t} \left(z_{sk,t}^i - z_{sk,t-1}^i \right) \leq y_{s,t}^i + \sum_{k=1}^{K} a_{sk,t} z_{sk,t-1}^i.$$

(a) Leiten Sie die Gleichung für $p_{sk,t}$ her, die sich aus Nutzenmaximierung ergibt. Nehmen Sie dazu an, dass Individuum i seine Asset-Haltung einmalig um $dz_{sk,t} \neq 0$ ändert.

(b) Welche zusätzlichen Annahmen erlauben es, die Gleichung aus Aufgabenteil (a) als fundamentale Asset-pricing-Gleichung zu interpretieren? Definieren Sie dabei den stochastischen Diskontfaktor $M_{t,t+1,s}$, und interpretieren Sie ihn: In welchen Zuständen s ist er hoch, in welchen niedrig?

(c) Unter welchen Annahmen folgt der Asset-Preis einem Random walk (d.h. $p_{k,t} = E_t(p_{k,t+1})$)? Begründen Sie Ihre Antwort mit der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung aus Aufgabenteil (b).

(d) Berechnen Sie aus der fundamentalen Asset-pricing-Gleichung unter der Annahme von Risikoneutralität Schritt für Schritt den Fundamentalwert des Assets $p_{k,t}$.