Wichtigste Rechenregeln für (bedingte) Momente

Im Folgenden bezeichnen X, Y, Z beliebige Zufallsvariablen (deren Erwartungswerte und Varianzen existieren) und a, b Skalare (Konstanten) in $\mathbb{R}$.

Moment	Voraussetzung / Bezeichnung	Formel
Erwartungswert $E[X]$		
	Der Erwartungswert einer Konstanten ist die Konstante selbst:	$E[a] = a$
	Der Erwartungswert ist linear, d.h.:	$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
	Falls X, Y stochastisch unabhängig sind, dann gilt:	$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$
	Für beliebige X, Y gilt: :	$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y] + Cov(X, Y)$
	Dreiecksungleichung der Erwartungswerte:	$E[\lvert X + Y\rvert] \leq E[\lvert X\rvert] + E[\lvert Y\rvert]$
	Jensen-Ungleichung: Sei $g(\cdot)$ stetig und konvex, dann gilt:	$E[g(X)] \geq g(E[X])$
	Law of Iterated Expectations (LIE):	$E[E[X\lvert Y]] = E[X]$
Varianz $Var(X)$	Definition Varianz: $Var(X) = E[(X - E[X])^2]$	Definition Kovarianz: $Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
	Die Varianz einer Konstanten ist 0:	$Var(a) = 0$
	Transformationsverhalten der Varianz:	$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
	Transformationsverhalten der Varianz für zwei Zufallsvariablen:	$Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y) + 2abCov(X, Y)$
	Verschiebungssatz:	$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
	Verschiebungssatz der Kovarianz:	$Cov(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$
	Transformationsverhalten der Kovarianz:	$Cov(aX + bY + c, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)$
Bedingter EW $E[X\lvert Y]$		
	Für jede Funktion $g(\cdot)$ gilt:	$E[g(X)\lvert X] = g(X)$ (insb. für $g \equiv$ id gilt: $E[X\lvert X] = X$
	Transformationsverhalten des bedingten EWs:	$E[g(X)Y + h(X)\lvert X] = g(X) \cdot E[Y\lvert X] + h(X)$
	Falls X, Y stochastisch unabhängig sind, dann gilt:	$E[X\lvert Y] = E[X]$
	Law of Iterated Expectations (LIE):	$E[X\lvert Z] = E[E[X\lvert Y, Z]\lvert Z]$
	Falls $E[Y^2] < \infty$ und $E[g(X)^2] < \infty$, so gelten:	$E[(Y - E[Y\lvert X])^2\lvert X] \leq E[(Y - g(X))^2\lvert X)]$ $E[(Y - E[Y\lvert X])^2] \leq E[(Y - g(X))^2)]$
Bed. Var. $Var(X\lvert Y)$		
	Verschiebungssatz der bed. Varianz:	$Var(X\lvert Y) = E[(X - E[X\lvert Y])^2\lvert Y] = E[X^2\lvert Y] - E[X\lvert Y]^2$
	Verschiebungssatz der bed. Kovarianz:	$Cov(X, Y\lvert Z) = E[XY\lvert Z] - E[X\lvert Z]E[Y\lvert Z]$
	Falls $X = a$, so gilt:	$Var(X\lvert Y) = 0$
	Zerlegungssatz der Varianz:	$Var(X) = E[Var(X\lvert Y)] + Var(E[X\lvert Y])$
	Für jede Funktion $g(\cdot)$ gilt:	$Var[g(Y)X\lvert Y] = g(Y)^2 Var(X\lvert Y)$
	Für jede Funktion $g(\cdot), h(\cdot)$ gilt:	$Cov(g(Z)X, h(Z)Y\lvert Z) = g(Z)h(Z)Cov(X, Y\lvert Z)$
	Erwartungswert und Kovarianzen:	$E[Cov(X, Y\lvert Z)] = E[(X - E[X\lvert Z]) \cdot (Y - E[Y\lvert Z])]$

Wichtigste (Fehl-) Schlüsse für (bedingte) Momente

1. $E[Y|X] = E[Y] \Longrightarrow Cov(Y, X) = 0$
   Da $E[Y|X = x] = f(x) = E[Y] = c$ für alle x konstant $E[Y]$ ist, hat jegliche Realisation x von X keinen Einfluss auf Y und somit ist Y von X unabhängig.

2. $E[Y|X] = 0 \Longrightarrow E[Y] = 0 \wedge Cov(Y, X) = 0$
   Spezialfall des ersten Schlusses, falls $f(x) \equiv 0 = E[Y]$ für alle x schon die „0"-Kostante ist. Falls Y und X schon unabhängig sind, sind sie auch unkorreliert.

3. $Cov(Y, X) = 0 \not\Longrightarrow E[Y|X] = 0$ im Allgemeinen
   Einfaches Gegenbeispiel: Sei $Y = X^2$ und $E[X] = E[X^3] = 0$. Dann gilt

   $$Cov(X, Y) = Cov(X, X^2) = \underbrace{E[X^3]}_{=0} - E[X^2]\underbrace{E[X]}_{=0} = 0 \Longrightarrow Cov(X, Y) = 0 \quad \text{aber} \quad E[Y|X] = E[X^2|X] = X^2$$

   Falls Y und X unkorreliert sind, so sind sie deshalb noch **nicht** unabhängig (insbesondere wenn quadratische, ... Einflüsse vorliegen).

4. $Cov(X, Y) \neq 0 \Longrightarrow E[Y|X] \neq 0$ im Allgemeinen
   Begründung: Dies ist die Verneinung der zweiten Aussage (aus $A \Longrightarrow B$ folgt $\neg B \Longrightarrow \neg A$).

5. $Cov(X, Y) = 0 \wedge E[Y] = 0 \Longrightarrow E[Y \cdot X] = 0$
   Einfaches Benutzen des Produkts von Zufallsvariablen im Erwartungswert liefert

   $$E[Y \cdot X] = \underbrace{E[Y]}_{=0} \cdot E[X] + \underbrace{Cov(Y, X)}_{=0} = 0$$

6. $E[Y] = 0 \not\Longrightarrow E[Y|X] = 0$
   Einfaches Gegenbeispiel:
   Sei $X = M_1 + M_2$ und $Y = M_1$, wobei M_1 und M_2 die unabhängigen Würfe zweier fairer Münzen mit Auszahlungen von -1 und 1 sind, dann:

   $$E[X] = E[M_1 + M_2] = E[M_1] + E[M_2] = 0 + 0 = 0$$

   $$E[X|Y] = E[M_1 + M_2|M_1] = M_1 + E[M_2|M_1] \overset{\text{ind.}}{=} M_1 + E[M_2] = M_1 = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \neq 0$$